ANÁLISIS NUMÉRICO I — Parcial N°1

16 de abril de 2015

Nombre	Carrera

1	2	3	4	TOTAL	NOTA

1. Determinar las cotas para los errores relativos de v y w cuando se usa aritmética finita para $v = a+a+a$, $w = 3a$ (aún cuando son dos expresiones algebraicamente equivalentes).

Resolución:
Se sabe de la teoría que para cualquier $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $fl(x) = x(1+\varepsilon)$, donde ε es el error relativo de x.
Supongamos entonces que $fl(a) = a(1+\varepsilon_a)$.
Llamemos $\hat{v}$ la expresión que podemos calcular para v con aritmética finita. Luego:

$$\begin{aligned}
\hat{v} &= fl(fl(fl(a)+fl(a))+fl(a)) \\
&= fl(fl(a(1+\varepsilon_a)+a(1+\varepsilon_a))+fl(a)) \\
&= fl(fl(2a(1+\varepsilon_a))+fl(a)) \\
&= fl(2a(1+\varepsilon_a)(1+\varepsilon_b)+a(1+\varepsilon_a)) \\
&= [2a(1+\varepsilon_a)(1+\varepsilon_b)+a(1+\varepsilon_a)](1+\varepsilon_c) \\
&= 2a(1+\varepsilon_a)(1+\varepsilon_b)(1+\varepsilon_c)+a(1+\varepsilon_a)(1+\varepsilon_c) \\
&= 2a(1+\varepsilon_a+\varepsilon_b+\varepsilon_a\varepsilon_b)(1+\varepsilon_c)+a(1+\varepsilon_a+\varepsilon_c+\varepsilon_a\varepsilon_c) \\
&= 2a(1+\varepsilon_a+\varepsilon_b+\varepsilon_a\varepsilon_b+\varepsilon_c+\varepsilon_a\varepsilon_c+\varepsilon_b\varepsilon_c+\varepsilon_a\varepsilon_b\varepsilon_c)+a(1+\varepsilon_a+\varepsilon_c+\varepsilon_a\varepsilon_c) \\
&= 2a+2a\varepsilon_a+2a\varepsilon_b+2a\varepsilon_a\varepsilon_b+2a\varepsilon_c+2a\varepsilon_a\varepsilon_c+2a\varepsilon_b\varepsilon_c+2a\varepsilon_a\varepsilon_b\varepsilon_c+a+a\varepsilon_a+a\varepsilon_c+a\varepsilon_a\varepsilon_c \\
&= 3a+2a\varepsilon_a+2a\varepsilon_b+2a\varepsilon_a\varepsilon_b+2a\varepsilon_c+2a\varepsilon_a\varepsilon_c+2a\varepsilon_b\varepsilon_c+2a\varepsilon_a\varepsilon_b\varepsilon_c+a\varepsilon_a+a\varepsilon_c+a\varepsilon_a\varepsilon_c \\
&= 3a\left(1+\frac{2}{3}\varepsilon_a+\frac{2}{3}\varepsilon_b+\frac{2}{3}\varepsilon_a\varepsilon_b+\frac{2}{3}\varepsilon_c+\frac{2}{3}\varepsilon_a\varepsilon_c+\frac{2}{3}\varepsilon_b\varepsilon_c+\frac{2}{3}\varepsilon_a\varepsilon_b\varepsilon_c+\frac{1}{3}\varepsilon_a+\frac{1}{3}\varepsilon_c+\frac{1}{3}\varepsilon_a\varepsilon_c\right), \\
&= v(1+\varepsilon_v),
\end{aligned}$$

donde ε_v es el error relativo de v, y

$$\varepsilon_v = \frac{2}{3}\varepsilon_a+\frac{2}{3}\varepsilon_b+\frac{2}{3}\varepsilon_a\varepsilon_b+\frac{2}{3}\varepsilon_c+\frac{2}{3}\varepsilon_a\varepsilon_c+\frac{2}{3}\varepsilon_b\varepsilon_c+\frac{2}{3}\varepsilon_a\varepsilon_b\varepsilon_c+\frac{1}{3}\varepsilon_a+\frac{1}{3}\varepsilon_c+\frac{1}{3}\varepsilon_a\varepsilon_c.$$

Notemos que ε_a, ε_b y ε_c provienen de errores de representación, por lo que $|\varepsilon_a| \leq \mu$, $|\varepsilon_b| \leq \mu$, $|\varepsilon_c| \leq \mu$, donde μ es el machine epsilon.
Usando la desigualdad triangular y utilizando las cotas se tiene que:

$$\begin{aligned}
|\varepsilon_v| &\leq \frac{2}{3}\mu+\frac{2}{3}\mu+\frac{2}{3}\mu^2+\frac{2}{3}\mu+\frac{2}{3}\mu^2+\frac{2}{3}\mu^2+\frac{2}{3}\mu^3+\frac{1}{3}\mu+\frac{1}{3}\mu+\frac{1}{3}\mu^2 \\
&= \frac{8}{3}\mu+\frac{7}{3}\mu^2+\frac{2}{3}\mu^3 \qquad (1)
\end{aligned}$$

Por otro lado, llamemos $\hat{w}$ la expresión que podemos calcular para w con aritmética finita. Luego:

$$\begin{aligned}
\hat{w} &= fl(3fl(a)) = fl(3a(1+\varepsilon_a)) = 3a(1+\varepsilon_a)(1+\varepsilon_d) = 3a(1+\varepsilon_a+\varepsilon_d+\varepsilon_a\varepsilon_d) \\
&= w(1+\varepsilon_w),
\end{aligned}$$

donde ε_w es el error relativo de w, y

$$\varepsilon_w = \varepsilon_a+\varepsilon_d+\varepsilon_a\varepsilon_d.$$

Análogamente, se tiene que ε_d proviene de un error de representación, por lo que $|\varepsilon_d| \leq \mu$, donde μ es el machine epsilon.
Usando la desigualdad triangular y utilizando las cotas se tiene que:

$$\begin{aligned}
|\varepsilon_w| &\leq \mu+\mu+\mu^2 \\
&= 2\mu+\mu^2. \qquad (2)
\end{aligned}$$

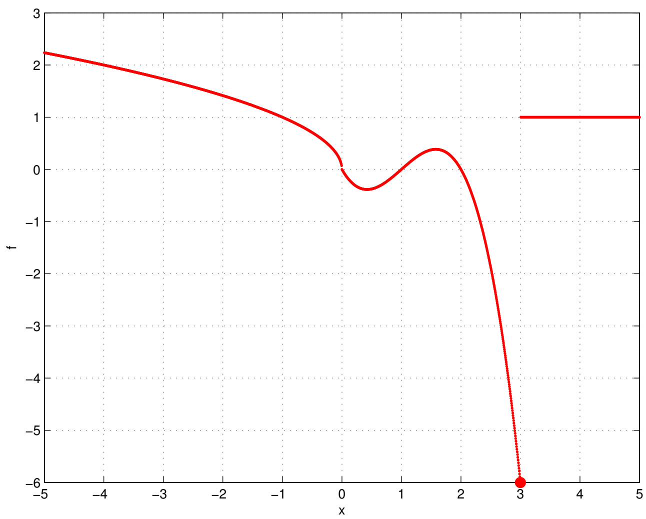
Notar que la cota (1) es más grande que la cota (2) cuando μ es pequeño.

2. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x < 0, \\ -x(x-1)(x-2), & x \in [0,3], \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Determine el comportamiento de la sucesión generada por el método de bisección para los siguientes intervalos: (a) $[-1,4]$; (b) $[-0.5,3]$; (c) $[2.5,3.5]$. En caso de ser convergente, determine su límite y si tal límite es una raíz de f.

Resolución:
Se puede hacer un bosquejo de la función utilizando la forma de la raíz cuadrada, las raíces del polinomio entre 0 y 3, y luego la función constante. Este bosquejo sería algo como:



(a) Notemos que $f(-1) > 0$ y $f(4) > 0$ por lo que el algoritmo del método de bisección no puede hacer la primera iteración. Luego no puede generarse la sucesión y no se puede realizar un análisis de la convergencia.

(b) Llamemos $a_0 = -0.5$ y $b_0 = 3$. Notemos que $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$. Luego podemos hacer la primera iteración del método, quedando:

$$c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{-0.5 + 3}{2} = \frac{2.5}{2} = 1.25.$$

Notemos que $f(c_0)f(b_0) < 0$, por lo que podemos definir $a_1 = c_0 = 1.25$ y $b_1 = b_0 = 3$. Además en el intervalo $[1.25, 3]$ la función cumple las hipótesis de convergencia del método de bisección (continuidad, cambio de signo), por lo que la sucesión va a converger a la raíz $x = 2$.

(c) Llamemos $a_0 = 2.5$ y $b_0 = 3.5$. Notemos que aunque $f(a_0)f(b_0) < 0$ no hay una raíz en el intervalo $[a_0, b_0]$. De hecho, la función f es discontinua allí. Sin embargo, el método puede ejecutarse (el método no se entera que la función no es continua). Luego,

$$c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{2.5 + 3.5}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Notemos que $f(c_0)f(b_0) < 0$, por lo que podemos definir $a_1 = c_0 = 3$ y $b_1 = b_0 = 3.5$. Hacemos una iteración más quedando:

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{3 + 3.5}{2} = \frac{6.5}{2} = 3.25.$$

Notemos que $f(a_1)f(c_1) < 0$, por lo que podemos definir $a_2 = a_1 = 3$ y $b_2 = c_1 = 3.25$. A partir de este momento se puede ver que el extremo izquierdo quedará fijo y los puntos medios (del método de bisección) pasarán a ser el extremo derecho de los subintervalos. Debido a este razonamiento es claro que $c_n \to 3$. Sin embargo, $x = 3$ no es una raíz de f. Esta aparente contradicción no es tal ya que la función no era continua y por lo tanto no se le puede aplicar el teorema de convergencia.

3. Dado $a > 0$, para calcular $\log(a)$ se debe hallar la raíz de $f(x) = e^x - a$.

   (a) Muestre que la iteración de Newton genera la siguiente sucesión: $x_{n+1} = x_n - 1 + \dfrac{a}{e^{x_n}}$.

   (b) Muestre que la función $h(x) = x - 1 + \frac{a}{e^x} - \log(a)$ satisface que $h(x) \geq 0$ para todo $x \in [\log(a), \infty)$.

   (c) Pruebe que para cualquier $x_0 \geq \log(a)$, las aproximaciones generadas por el método de Newton satisfacen $\log(a) \leq x_{n+1} \leq x_n$ para $n \geq 0$.

   (d) Finalmente concluya que la sucesión generada por el algoritmo converge a $\log(a)$.

Resolución:
(a) Notar que $f'(x) = e^x$. Luego, dado un x_0, se tiene que el método de Newton aplicado a f es:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{e^{x_n} - a}{e^{x_n}} = x_n - 1 + \frac{a}{e^{x_n}}.$$

(b) Notar que la función h es no decreciente en $[\log(a), \infty)$, ya que

$$\begin{aligned} h'(x) \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - ae^{-x} \geq 0, \\ &\Leftrightarrow \quad 1 \geq ae^{-x}, \\ &\Leftrightarrow \quad \log(1) \geq \log(ae^{-x}) \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \geq \log(a) + log(e^{-x}) \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \geq \log(a) - x \\ &\Leftrightarrow \quad x \geq \log(a). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$h(\log(a)) = \log(a) - 1 + \frac{a}{e^{\log(a)}} - \log(a) = \log(a) - 1 + \frac{a}{a} - \log(a) = \log(a) - 1 + 1 - \log(a) = 0,$$

Luego, se cumple que $h(x) \geq 0$ para todo $x \in [\log(a), \infty)$

(c) Notemos primero que

$$\begin{aligned} z \geq \log(a) \quad &\Leftrightarrow \quad e^z \geq a \\ &\Leftrightarrow \quad 1 \geq \frac{a}{e^z} \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \geq -1 + \frac{a}{e^z}. \end{aligned} \tag{3}$$

Probaremos por inducción que $\log(a) \leq x_{n+1} \leq x_n$ para todo $n \geq 0$.
Veamos el primer caso, es decir cuando $n = 0$. Como $x_0 \geq \log(a)$ y (3) se tiene que $x_1 = x_0 - 1 + \frac{a}{e^{x_0}} \leq x_0$. Por otro lado, por lo anterior y como $x_0 \geq \log(a)$, tenemos:

$$x_1 - \log(a) = x_0 - 1 + \frac{a}{e^{x_0}} - \log(a) = h(x_0) \geq 0 \Rightarrow x_1 \geq \log(a).$$

Supongamos que vale la afirmación vale para n. Veamos para $n+1$. Como $x_n \geq \log(a)$ y (3) se tiene que $x_{n+1} = x_n - 1 + \frac{a}{e^{x_n}} \leq x_n$. Por otro lado, por lo anterior y como $x_n \geq \log(a)$, tenemos:

$$x_{n+1} - \log(a) = x_n - 1 + \frac{a}{e^{x_n}} - \log(a) = h(x_n) \geq 0 \Rightarrow x_{n+1} \geq \log(a).$$

(d) Como la sucesión $\{x_n\}$ es no creciente y acotada inferiormente por $\log(a)$, entonces es convergente a un número x^*. Recordemos que:

$$x_{n+1} = x_n - 1 + \frac{a}{e^{x_n}}, \quad \forall n \geq 0.$$

Tomando límite a ambos miembros cuando $n \to \infty$ se tiene:

$$\begin{aligned} x^* = x^* - 1 + \frac{a}{e^{x^*}} \quad &\Leftrightarrow \quad 0 = -1 + \frac{a}{e^{x^*}} \\ &\Leftrightarrow \quad 1 = \frac{a}{e^{x^*}} \\ &\Leftrightarrow \quad e^{x^*} = a \\ &\Leftrightarrow \quad x^* = \log(a). \end{aligned}$$

Luego, la sucesión converge a $\log(a)$.

4. Demuestre que si u es una función que interpola a f en x_0, x_1, …, x_{n-1} y si v es una función que interpola a f en x_1, x_2, …, x_n, entonces:

$$h(x) = \frac{(x_n - x)\,u(x) + (x - x_0)\,v(x)}{x_n - x_0},$$

interpola a f en x_0, x_1, …, x_n.

Resolución:
Veamos que h interpola a f en $x_0, \ldots x_n$.

$$h(x_0) = \frac{(x_n - x_0)\,u(x_0) + (x_0 - x_0)\,v(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{(x_n - x_0)\,u(x_0)}{x_n - x_0} = u(x_0) = f(x_0),$$

donde la última igualdad se cumple pues u interpola a f en x_0.
Para $i = 1, \ldots, n-1$ se tiene

$$\begin{aligned} h(x_i) &= \frac{(x_n - x_i)\,u(x_i) + (x_i - x_0)\,v(x_i)}{x_n - x_0} = \frac{(x_n - x_i)\,f(x_i) + (x_i - x_0)\,f(x_i)}{x_n - x_0} \\ &= \frac{f(x_i)(x_n - x_i + x_i - x_0)}{x_n - x_0} = \frac{f(x_i)(x_n - x_0)}{x_n - x_0} = f(x_i), \end{aligned}$$

donde hemos usado que u y v interpolan a f en $x_1, \ldots, x_{n-1}$.
Finalmente,

$$h(x_n) = \frac{(x_n - x_n)\,u(x_n) + (x_n - x_0)\,v(x_n)}{x_n - x_0} = \frac{(x_n - x_0)\,v(x_n)}{x_n - x_0} = v(x_n) = f(x_n),$$

donde la última igualdad se cumple pues v interpola a f en x_n.